1.4. PIERWIASTKOWANIE

Definicja pierwiastka n – tego stopnia

$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$

a - liczba podpierwiastkowa
n - stopień pierwiastka
b - wynik pierwiastkowania

jeśli n jest liczbą parzystą , to $a \geq 0; b \geq 0$
jeśli n jest liczbą nieparzystą, to $a, b \in R$

Przykład 1.4.1. Oblicz

a) $\sqrt{64}$ b) $\sqrt[3]{64}$ c) $\sqrt{0}$ d) $\sqrt[5]{-1}$

e) $\sqrt[4]{-16}$ f) $\sqrt{40000}$ g) $\sqrt[3]{0{,}000027}$ h) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$

i) $\sqrt[3]{-3375}$

Rozwiązanie	Komentarz
a) $\sqrt{64} = 8$, bo $8^2 = 64$	$\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$ Wykorzystujemy definicję pierwiastka n – tego stopnia.
b) $\sqrt[3]{64} = 4$, bo $4^3 = 64$	
c) $\sqrt{0} = 0$, bo $0^2 = 0$	
d) $\sqrt[5]{-1} = -1$, bo $(-1)^5 = -1$	
e) $\sqrt[4]{-16}$ - nie istnieje	Nie istnieje pierwiastek parzystego stopnia z liczby ujemnej.
f) $\sqrt{40000} = 200$, bo $200^2 = 40000$	
g) $\sqrt[3]{0{,}000027} = 0{,}03$, bo $(0{,}03)^3 = 0{,}000027$	
h) $\sqrt{2\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$, bo $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$	Pierwiastkując liczbę mieszaną , musimy zamienić ją na ułamek niewłaściwy.
i) $\sqrt[3]{-3375} = -15$, bo $(-15)^3 = -3375$	Przy pierwiastkowaniu dużych liczb możemy wykorzystać rozkład liczby na czynniki pierwsze. $\begin{array}{r\|l} 3375 & 5 \\ 675 & 5 \\ 135 & 5 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$ $3375 = 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 = 15 \cdot 15 \cdot 15 = 15^3$

Prawa działań na pierwiastkach

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$
$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$
$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$$
$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

$\sqrt[n]{a^n} = a$, gdy n jest liczbą nieparzystą $\quad \sqrt[n]{a^n} = |a|$, gdy n jest liczbą parzystą

Przykład 1.4.2. Oblicz

a) $\sqrt{40} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}$

Rozwiązanie	Komentarz
$\sqrt{40} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} = \sqrt{40 \cdot \frac{2}{5}} = \sqrt{\frac{80}{5}} = \sqrt{16} = 4$	Stosujemy wzór $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

b) $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{81}}$

Rozwiązanie	Komentarz
$\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{81}} = \sqrt[3]{\frac{3}{81}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$	Stosujemy wzór $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

c) $\sqrt{7} : \sqrt{2\frac{1}{3}}$

Rozwiązanie	Komentarz
$\sqrt{7} : \sqrt{2\frac{1}{3}} = \sqrt{7 : 2\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{7}{1} : \frac{7}{3}} = \sqrt{\frac{7}{1} \cdot \frac{3}{7}} = \sqrt{3}$	Stosujemy wzór $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

d) $\left(2\sqrt[4]{3}\right)^4$

Rozwiązanie	Komentarz
$\left(2\sqrt[4]{3}\right)^4 = 2^4 \cdot \left(\sqrt[4]{3}\right)^4 = 16 \cdot 3 = 48$	Stosujemy wzór $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

Przykład 1.4.3. Wyłącz czynnik przed pierwiastek

a) $\sqrt{48}$

Rozwiązanie	Komentarz
$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$	Stosujemy wzór $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

b) $\sqrt[3]{375}$

<table>
<tr><th>Rozwiązanie</th><th>Komentarz</th></tr>
<tr><td>$\sqrt[3]{375} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 5\sqrt[3]{3}$</td><td>Przy pierwiastkowaniu dużych liczb możemy wykorzystać rozkład liczby na czynniki pierwsze.
$\begin{array}{r|l} 375 & 5 \\ 75 & 5 \\ 15 & 5 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$
$375 = 5^3 \cdot 3$</td></tr>
</table>

Przykład 1.4.4. Włącz czynnik pod pierwiastek

a) $3\sqrt{5}$

Rozwiązanie	Komentarz
$3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{45}$	

b) $2\sqrt[4]{3}$

Rozwiązanie	Komentarz
$2\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3} = \sqrt[4]{48}$	

Przykład 1.4.5. Oblicz

a) $2\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt[3]{2} + 4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$

Rozwiązanie	Komentarz
$2\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt[3]{2} + 4\sqrt{2} - 3\sqrt{3} =$ $= \underline{2\sqrt{3}} + \underline{\underline{\sqrt{2}}} - \sqrt[3]{2} + \underline{\underline{4\sqrt{2}}} - \underline{3\sqrt{3}} =$ $= -\sqrt{3} + 5\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}$	Wykonujemy redukcję wyrazów podobnych. Wyrazami podobnymi są wyrazy zawierające te same pierwiastki.

b) $\sqrt{72}-4\sqrt{18}+5\sqrt{8}$

Rozwiązanie	Komentarz
$\sqrt{72}-4\sqrt{18}+5\sqrt{8}=$ $=\sqrt{36\cdot 2}-4\sqrt{9\cdot 2}+5\sqrt{4\cdot 2}=$ $=6\sqrt{2}-4\cdot 3\sqrt{2}+5\cdot 2\sqrt{2}=$ $=6\sqrt{2}-12\sqrt{2}+10\sqrt{2}=$	Wyciągamy czynniki przed pierwiastki
$=4\sqrt{2}$	Wykonujemy redukcję wyrazów podobnych.

<u>Przykład 1.4.6.</u> Wykonaj działanie $\left(\sqrt{3}-4\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{3}+5\sqrt{2}\right)$

Rozwiązanie	Komentarz
$\left(\sqrt{3}-4\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{3}+5\sqrt{2}\right)=$ $=\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{2}-4\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{3}-4\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}=$ $=2\sqrt{9}+5\sqrt{6}-8\sqrt{6}-20\sqrt{4}=$ $=2\cdot 3+5\sqrt{6}-8\sqrt{6}-20\cdot 2=$ $=6+5\sqrt{6}-8\sqrt{6}-40=$ $=-34-3\sqrt{6}$	Mnożymy każdy wyraz z pierwszego nawiasu przez każdy wyraz z drugiego nawisu. Wykonujemy redukcję wyrazów podobnych.

Wzory skróconego mnożenia

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ - kwadrat sumy

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ - kwadrat różnicy

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ - różnica kwadratów

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ - sześcian sumy

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ - sześcian różnicy

$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$ - suma sześcianów

$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$ - różnica sześcianów

Przykład 1.4.7. Wykonaj działania, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia:

a) $\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}$

Rozwiązanie	Komentarz
$\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} =$ $= \sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right) \cdot \left(2-\sqrt{3}\right)} =$ $= \sqrt{2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} =$ $= \sqrt{4-3} = \sqrt{1} = 1$	Stosujemy wzór $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

b) $\left(2\sqrt{5}-3\right)^2$

Rozwiązanie	Komentarz
$\left(2\sqrt{5}-3\right)^2 =$ $= \left(2\sqrt{5}\right)^2 - 2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot 3 + 3^2 =$ $= 4 \cdot 5 - 12\sqrt{5} + 9 =$ $= 29 - 12\sqrt{5}$	Stosujemy wzór $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

c) $\left(1+\sqrt{2}\right)^3$

Rozwiązanie	Komentarz
$\left(1+\sqrt{2}\right)^3 =$ $= 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot 1 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^3 =$ $= 1 + 3\sqrt{2} + 3 \cdot 2 + \sqrt{8} =$ $= 1 + 3\sqrt{2} + 6 + 2\sqrt{2} =$ $= 7 + 5\sqrt{2}$	Stosujemy wzór $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Przykład 1.4.8. Usuń niewymierność z mianownika:

a) $\frac{4}{5\sqrt{2}}$

Rozwiązanie	Komentarz
$\frac{4}{5\sqrt{2}} = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{5\sqrt{4}} = \frac{4\sqrt{2}}{5 \cdot 2} = \frac{4\sqrt{2}}{10} =$ $= \frac{2\sqrt{2}}{5}$	Ułamek rozszerzamy przez $\sqrt{2}$

b) $\frac{2\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

Rozwiązanie	Komentarz
$\frac{2\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}\left(1+\sqrt{3}\right)}{\left(1-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)}=\frac{2\sqrt{3}+2\sqrt{9}}{1^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=$ $=\frac{2\sqrt{3}+2\cdot 3}{1-3}=\frac{2\sqrt{3}+6}{-2}=\frac{2\sqrt{3}}{-2}+\frac{6}{-2}=-\sqrt{3}-3$	Jeśli w mianowniku jest różnica lub suma, to licznik i mianownik mnożymy przez wyrażenie podobne jak w mianowniku, ale ze zmienionym na przeciwny znakiem działania i korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

Przykład 1.4.9. Uzasadnij, że $\sqrt{7+4\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$

Rozwiązanie	Komentarz
$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$ $\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^2=\left(2+\sqrt{3}\right)^2$	Obie strony równości są dodatnie , dlatego podnosząc je do kwadratu otrzymujemy równość tożsamościową.
$7+4\sqrt{3}=2^2+2\cdot 2\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2$ $7+4\sqrt{3}=4+4\sqrt{3}+3$ $7+4\sqrt{3}=7+4\sqrt{3}$	Podnosząc prawą stronę równości do kwadratu stosujemy wzór skróconego mnożenia $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

ĆWICZENIA

Ćwiczenie 1.4.1. Oblicz:

a) (1pkt.) $\sqrt{6{,}25}$

b) (1pkt.) $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$

c) (1pkt.) $\sqrt{40\frac{1}{2}}:\sqrt{8}$

d) (1pkt.) $\sqrt[3]{-2}\cdot\sqrt[3]{32}$

e) (1pkt.) $\sqrt[5]{(-3)^{10}}$

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie wyniku.	1

Ćwiczenie 1.4.2. (1pkt.) Wyłącz czynnik przed pierwiastek

a) (1pkt.) $\sqrt[3]{81}$

b) (1pkt.) $\sqrt{147}$

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	**Odpowiedź**	**Liczba punktów**
1	Podanie wyniku.	1

Ćwiczenie 1.4.3. Wykonaj działania. Wynik przedstaw w postaci $a+b\sqrt{c}$

a) (1pkt.) $\left(\sqrt{12}-2\sqrt{3}-\sqrt{27}+\sqrt{1}\right)\cdot 2\sqrt{3}$,

b) (1pkt.) $\left(1-2\sqrt{2}\right)\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)$,

c) (1pkt.) $\left(2+\sqrt{5}\right)^2$.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	**Odpowiedź**	**Liczba punktów**
1	Podanie wyniku.	1

Ćwiczenie 1.4.4. Zlikwiduj niewymierność z mianownika, wynik przedstaw w najprostszej Postaci.

a) (1pkt.) $\frac{10}{\sqrt{2}}$,

b) (1pkt.) $\frac{2}{1+2\sqrt{3}}$.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	**Odpowiedź**	**Liczba punktów**
1	Podanie wyniku.	1

Ćwiczenie 1.4.5. (4pkt.) Oblicz $x+y, x-y, x\cdot y, \frac{x}{y}$ jeśli $x=2+\sqrt{2}, y=1-4\sqrt{2}$.

Wynik przedstaw w postaci $a+b\sqrt{c}$.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie wartości $x+y$	1
2	Podanie wartości $x-y$	1
3	Podanie wartości $x\cdot y$	1
4	Podanie wartości $\frac{x}{y}$	1

Ćwiczenie 1.4.6. (2pkt.) Wyznacz niewiadomą x z równania: $x-3=x\sqrt{2}-3\sqrt{3}$.

Wynik przedstaw w najprostszej postaci.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Przedstawienie x w postaci ułamka.	1
2	Podanie wartości x po usunięciu niewymierności z mianownika.	1